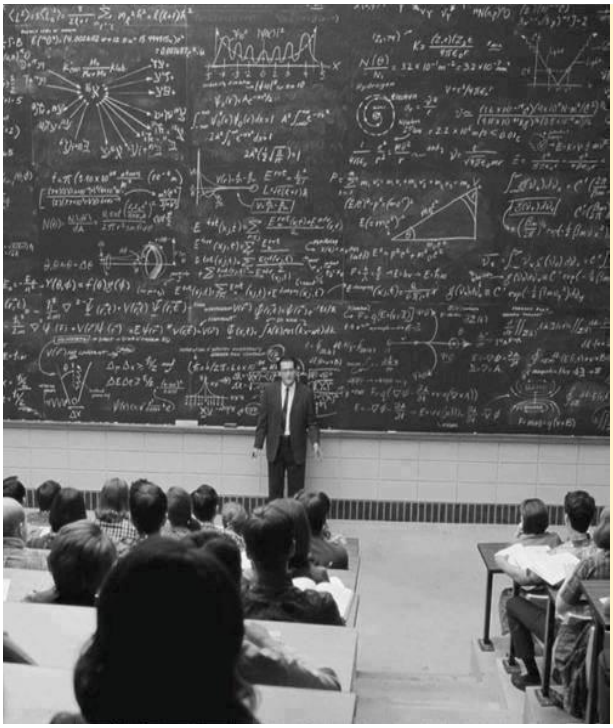
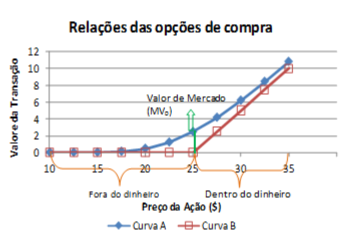


Opções

Modelos Binomiais e de Black Sholes



O que produz o valor da opção?

É a relação entre o seu preço de exercício e o preço da ação.

Devemos distinguir o valor teórico mínimo de uma opção (valor intrínseco) do seu valor de mercado. Se S < X (ou VI < 0) ninguém vai exercê-la e ela não tem valor (está fora do dinheiro). Se S > X (ou VI > 0), a probabilidade de exercício aumenta com o S (dentro do dinheiro), pois o exercício torna-se uma certeza virtual.

O VI de uma opção DIFERE do preço de mercado. Normalmente o preço de mercado é MAIOR que o VI. Os investidores estão dispostos a pagar um prêmio acima do VI porque esperam que o S suba além do X. Observe que a curva A inclina-se em direção à curva B, à medida que S aumenta. Essa é uma reação natural, porque em parte ninguêm pagará um prêmio se as chances de aumentos posteriores de S desaparecer. Assim acontece no mercado, a ação torna-se super avaliada e a probabilidade de S continuar a subir reduz-se a zero.

O modelo de Black & Scholes

Em 1973, Fischer Black e Myron Scholes publicaram a primeira solução para avaliação do prêmio de opções, isto é, a precificação de uma opção.

Esse trabalho pioneiro deu início a uma cooperação estreita entre *traders* e acadêmicos, que gerou as teorias modernas de administração de ativos.

Black & Scholes usaram um instrumental matemático sofisticado para a construção de sua fórmula, cuja exposição em detalhes excede o propósito deste curso.

Hipóteses do Modelo de Black & Scholes

A seguir apresentaremos alguma hipótese que foram estabelecidas no desenvolvimento do modelo:

1. Não existem custos de transação nem impostos, e todos os títulos são perfeitamente divisíveis.

2. Os investidores podem aplicar ou tomar dinheiro emprestado à taxa de juros livre de risco.

3. Não existem oportunidades de arbitragem sem risco.

4. O preço do ativo-objeto S tem comportamento estocástico contínuo, na forma de Movimento Geométrico Browniano (GBM), o qual asume que a opção varia no tempo com distribuição lognormal de probabilidades e com média e variância constantes;
- O preço da ação não pode ser negativo;
- A taxa de retorno da ação:

$$r_t = ln\left(\frac{S_T}{S_{T-1}}\right)$$

5. A ação-objeto da opção NÃO distribui dividendos durante o prazo da opção, ou a opção é protegida contra dividendos;
Verdadeiro no Brasil : Curto prazo
Normas da Bolsa

Hipóteses do Modelo de Black & Scholes

6. A negociação de títulos é contínua.

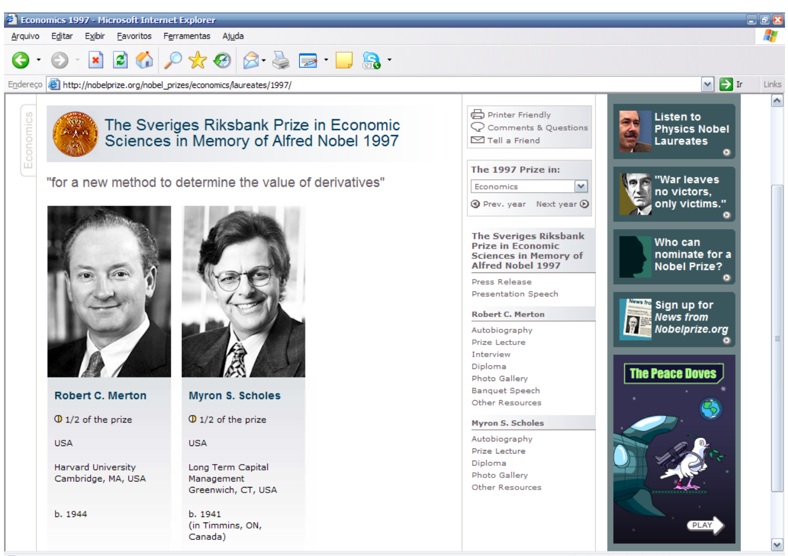
7. A taxa de juros livre de risco é constante.

8. A opção é *call* europeia.

No Brasil, as opções são americanas!

Esse problema é eliminado graças à proteção contra dividendos previstas no regulamento do mercado de opções

Fórmula de Black&Scholes/ Merton



O Modelo de Black & Scholes

Preço justo da opção europeia de compra (call):

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

S = preço atual (spot) da ação-objeto da opção call

r = taxa de juro livre de risco no regime de capitalização contínua

σ = volatilidade do preço da ação-objeto, definida pelo desvio padrão da taxa de retorno da ação.

$N(d_1)$ e $N(d_2)$ = probabilidade acumulada, na distribuição normal padronizada, de -∞ até o valor de d_1 ou d_2 calculado.

X = preço de exercício da opção call

T = prazo de vencimento da aopção call, ou seja, o tempo restante até a data de vencimento da opção.

d_1 e d_2 = variáveis com distribuição normal padronizada (média 0 e variância = 1).

EXEMPLO

Na BOVESPA, em 14/04/2003:
- opção *call* da Petrobrás PN, vencimento em maio de 2003, com preço de exercício de R$ 50: PETR 50
- prêmio (preço) da opção: R$ 1,35
- S = R$ 46,25 (cotação de ações preferenciais nominativas da Petrobras em 14/04/03.
- Selic (taxa livre de risco), convertida para capitalização contínua = 26,2116%
- T = 36 dias ⇒ 36/365
- σ = desconhecido (coletar uma série histórica de preços e calcular o desvio-padrão da taxa de retorno da ação). Vamos supor 36%.

Preço justo da opção europeia *call* (c)

$$c = SN(d_1) - X\,e^{-rT}N(d_2) \qquad d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

S = R$ 46,25 X = R$ 50,00 r = 0,262116 T = 0,0986 σ = 0,36

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{46{,}25}{50}\right) + \left(0{,}262116 + \frac{0{,}36^2}{2}\right)0{,}0986}{0{,}36\sqrt{0{,}0986}} = -0{,}40437$$

$$d_2 = -0{,}40437 - 0{,}36\sqrt{0{,}0986} = -0{,}51743$$

$N(d_1) = 0{,}34297$ ⇐ EXCEL ⇒ $N(d_2) = 0{,}30243$

$$c = 46{,}25\,.\,0{,}34297 - 50\,.\,e^{-0{,}262116\,.0{,}0986}\,.\,0{,}30243 = R\$\ 1{,}13$$

inferior ao cotado na data (R$ 1,35)!!!!

EXEMPLO 2

Encontre o valor de uma opção de compra Microsoft com um preço de exercício de $150

O valor corrente da ação da Microsoft é $160

A taxa de juros disponível nos EUA é *r* = 5%.

O vencimento da opção é de 6 meses .

A volatilidade do Ativo-objeto é de 30% por ano.

Antes de iniciarmos, note que o *valor intrínseco* da opção é $10—nossa resposta deve ser no mínimo essa quantia.

EXEMPLO 2

Primeiro calcule d_1 e d_2

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + 0{,}5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_1 = \frac{\ln(160/150) + (0{,}05 + 0{,}5(0{,}30)^2)0{,}5}{0{,}30\sqrt{0{,}5}} = 0{,}5282$$

Então,

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0{,}52815 - 0{,}30\sqrt{0{,}5} = 0{,}31602$$

EXEMPLO 2

$$C_0 = S \times \mathrm{N}(d_1) - Xe^{-rT} \times \mathrm{N}(d_2)$$

$$d_1 = 0{,}5282$$

=DIST.NORMP.N(0,52815;VERDADEIRO)

N(d_1) = N(0,52815) = 0,7013

N(d_2) = N(0,31602) = 0,62401

$$d_2 = 0{,}31602$$

=DIST.NORMP.N(0,31602;VERDADEIRO)

$$C_0 = \$160 \times 0{,}7013 - 150e^{-0{,}05\times 0{,}5} \times 0{,}62401$$

$$C_0 = \$20{,}92$$

EXEMPLO 3

Considere S = \$50, X = \$45, T = 6 meses, r = 10%, e σ = 28%, calcule o valor de uma opção de compra e de venda.

$$d_1 = \frac{\ln\left(50/45\right) + \left(0{,}10 - 0 + \frac{0{,}28^2}{2}\right)0{,}50}{0{,}28\sqrt{0{,}50}} = 0{,}884$$

$$d_2 = 0{,}884 - 0{,}28\sqrt{0{,}50} = 0{,}686$$

Usando a função =DIST.NORMP.N(d_1;VERDADEIRO)

$N(d_1)$ = 0.812 e $N(d_2)$ = 0.754

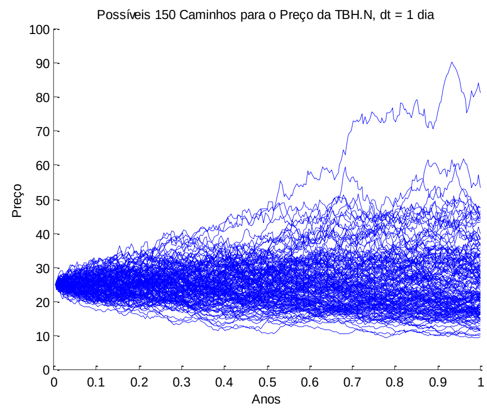
$$C = 50\,e^{-0(0,5)}\,(0{,}812) - 45\,e^{-0{,}10(0{,}50)}\,(0{,}754) = \$8{,}32$$

$$P = \$8{,}32 - \$50 + \$45e^{-0{,}10(0{,}50)} = \$1{,}125$$

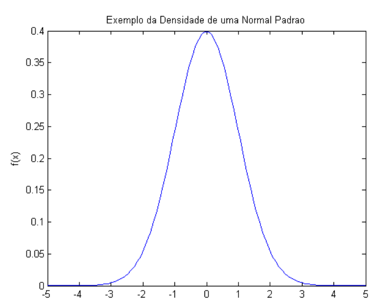
Movimento Browniano Geométrico - GBM

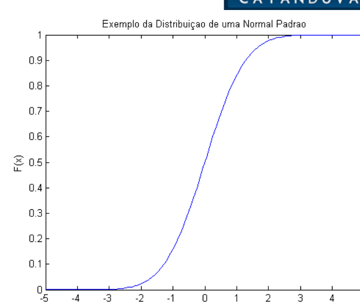
Simulação de alguns caminhos para uma ação seguindo o modelo de B&S

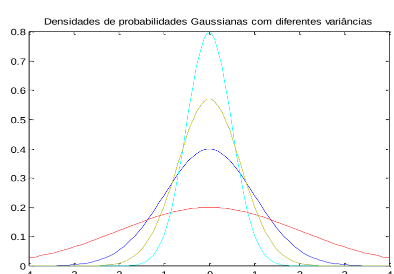
- Supondo taxa livre de risco de 3% e volatilidade de 40%.



Distribuição Normal







Distribuição Normal

- Completamente caracterizada pela média e a variância.

Sua densidade de probabilidades é dada por:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

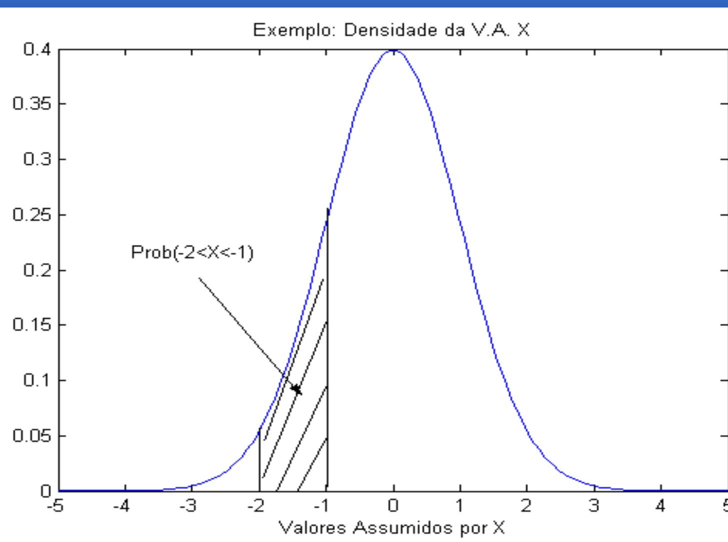
- O que são os seguintes termos: distribuição de probabilidades e densidade de probabilidades?

- A distribuição de uma V.A. X é dada por: $F(x) = P(X \leq x)$
- A densidade de uma V.A. É obtida derivando-se sua distr.

05/07/2013 Bertolo - Mercado de Derivativos 15

Distribuição Normal

Relação entre a Densidade e o Cálculo de uma Probabilidade



05/07/2013 Bertolo - Mercado de Derivativos 16

Fórmula de Black Scholes

$$c = SN(d1) - Xe^{-rt}N(d2)$$

$$p = Xe^{-rt}N(-d2) - SN(-d1)$$

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right).t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d2 = d1 - \sigma\sqrt{t}$$

- c – prêmio teórico da opção de compra (*call*)
- p – prêmio teórico da opção de venda (*put*)
- S – cotação à vista da taxa de câmbio (*spot price*)
- X – preço de exercício da taxa de câmbio

Fórmula de Black Scholes (opções de moeda)

$$c = Se^{-r^*t}N(d1) - Xe^{-rt}N(d2)$$

$$p = Xe^{-rt}N(-d2) - Se^{-r^*t}N(-d1)$$

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - r^* + \frac{\sigma^2}{2}\right).t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d2 = d1 - \sigma\sqrt{t}$$

- r – taxa de juros nominal contínua da moeda local projetada até o vencimento da opção
- r* – cupom cambial limpo
- t – tempo para o vencimento da opção
- σ – volatilidade da taxa de câmbio
- N(x) – função de probabilidade cumulativa de uma variável normal padronizada
- e – base dos logaritmos naturais = 2,718282; ln – logaritmo natural

Opção de **compra** europeia de reais por dólar

Cálculo do prêmio teórico, em 1/6/2004, de uma opção de compra de dólar X = R$ 3.300 / US$ 1.000, com vencimento em 90 dias corridos:

- S = R$ 3.145/ US$ 1.000
- X = R$ 3.300/ US$ 1.000
- t = 90 dias corridos = 0,25 ano
- r: "*swap*" CDI x Pré para 90 dias em 1/6/2004 = 16,26% ao ano – taxa para 360 dias corridos transformando em taxa contínua:
  - 1,1626 = 1 x e^r => Ln (1,1626) = r =15,07% ao ano
- r*: cupom cambial limpo para 90 dias em 1/6/2004 = 4% ao ano transformando em taxa em taxa contínua como acima:
  - r*= 3,92% ao ano

Opção de **compra** europeia de reais por dólar

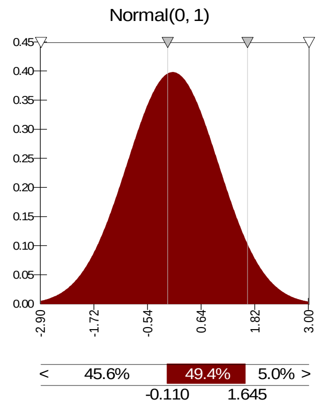
- Cálculo da volatilidade histórica a partir dos preços de fechamento do dólar nos 21 dias úteis anteriores:
- 1,48% ao dia
- 23,54% ao ano

Dias	Câmbio	Retorno LN(xt/xt-1)
0	2.932	-
1	2.981	0.016574031
2	2.970	-0.003696862
3	2.955	-0.005063302
4	2.999	0.014780249
5	3.062	0.020789397
6	3.140	0.025154503
7	3.076	-0.020592748
8	3.140	0.020592748
9	3.134	-0.001912656
10	3.092	-0.013492013
11	3.125	0.010616152
12	3.131	0.001918159
13	3.134	0.000957702
14	3.214	0.025206123
15	3.196	-0.005616239
16	3.180	-0.005018831
17	3.139	-0.012976919
18	3.163	0.007616666
19	3.121	-0.013367481
20	3.090	-0.009982372
21	3.190	0.031849826
Desvio Padrao 1 dia		0.014834112

$$\sigma_{ANO} = \sigma_{DIA}\sqrt{252} = 0.2354$$

Opção de **compra** (*call*) europeia de reais por dólar

- Cálculo d1 e d2:



$$d1=\frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right)+\left(r-r^{*}+\frac{\sigma^{2}}{2}\right).t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d2=d1\text{-}\sigma\sqrt{t}$$

$$d1=\frac{\ln\left(\frac{3{,}145}{3{,}300}\right)+\left(0{,}1507-0{,}0392+\frac{0{,}2354^{2}}{2}\right).0{,}25}{0{,}2354\sqrt{0.25}}=-0.1$$

$$d2=-0{,}11.0{,}2354\sqrt{0.25}=-0{,}23$$

$$N(d1)=0.4562 \quad N(d2)=0{,}4090$$

$$c=Se^{-r^{*}t}N(d1)-Xe^{-rt}N(d2)$$

$$c=3{,}145.e^{-0{,}0392.0{,}25}.0{,}4562-3{,}300.e^{-0{,}1507.0{,}25}.0{,}4090=R\$120{,}96/US\$1$$

Opção de **venda** europeia de reais por dólar

Cálculo do prêmio teórico, em 01/06/2004, de uma opção de venda de dólar X=*R*$3100 /*US*$1.000 , com vencimento em 90 dias corridos. Os dados do exemplo anterior se mantém, com exceção do preço de exercício, que agora é igual a *R*$3100 /*US*$1.000.

- S = R$ 3.145/ US$ 1,000
- X = R$ 3.100/ US$ 1,000
- t = 90 dias corridos = 0,25 ano
- r: "*swap*" CDI x Pré para 90 dias em 1/6/2004 = 16,26% ao ano – taxa para 360 dias corridos transformando em taxa contínua:
- 1,1626 = 1 x e^r => Ln (1,1626) = r =15.07% ao ano
- r*: cupom cambial limpo para 90 dias em 1/6/2004 = 4% ao ano transformando em taxa em taxa contínua como acima: r*= 3,92% ao ano.

Opção de **venda** europeia de reais por dólar

- Cálculo N(-d1) e N(-d2):

$$d1=\frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right)+\left(r-r^{*}+\frac{\sigma^{2}}{2}\right).t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d2=d1-\sigma\sqrt{t}$$

$$d1=\frac{\ln\left(\frac{3{,}145}{3{,}100}\right)+\left(0{,}1507-0{,}0392+\frac{0{,}2354^{2}}{2}\right).0{,}25}{0{,}2354\sqrt{0.25}}=0.29$$

$$d2=-0{,}29.0{,}2354\sqrt{0.25}=0{,}17$$

$$N(-d1)=0.3859 \quad N(\text{-}d2)=0{,}4325$$

Dias	Câmbio	Retorno LN(xt/xt-1)
0	2.932	-
1	2.981	0.016574031
2	2.970	-0.003696862
3	2.955	-0.005063302
4	2.999	0.014780249
5	3.062	0.020789397
6	3.140	0.025154503
7	3.076	-0.020592748
8	3.140	0.020592748
9	3.134	-0.001912656
10	3.092	-0.013492013
11	3.125	0.010616152
12	3.131	0.001918159
13	3.134	0.000957702
14	3.214	0.025206123
15	3.196	-0.005616239
16	3.180	-0.005018831
17	3.139	-0.012976919
18	3.163	0.007616666
19	3.121	-0.013367481
20	3.090	-0.009982372
21	3.190	0.031849826
Desvio Padrao 1 dia		0.014834112

$$\sigma_{ANO}=\sigma_{DIA}\sqrt{252}=0.2354$$

$$p=Xe^{-rt}N(-d2)-Se^{-r^{*}t}N(-d1)$$

$$c=3{,}100.e^{-0{,}1507.0{,}25}.0{,}4325-3{,}300.e^{-0{,}0392.0{,}25}.0{,}3859=R\$89{,}36/US\$1$$

Volatilidade Implícita

- ❑Possivelmente, a volatilidade da ação foi subestimada, uma volatilidade mais elevada produziria um valor teórico mais alto.
- ❑A R$ 1,35, o mercado está implicitamente estimando que a volatilidade futura da opção será superior a 36% a.a..

Cálculo da volatilidade implícita:

A c = R$ 1,35 e dados os valores de S, r, T e X, o valor de σ, obtido por tentativa e erro será:

σ = 40,13% a.a.

Usar o Solver do Excel

Opção Europeia Put

Preço justo da opção europeia put (p)

$$p = X\,e^{-rT} - S - c$$

S = R$ 46,25 X = R$ 50,00 r = 0,262116 T = 0,0986 σ = 0,36

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{46,25}{50}\right) + \left(0,262116 + \frac{0,36^2}{2}\right)0,0986}{0,36\sqrt{0,0986}} = -0,40437 \qquad d_2 = -0,40437 - 0,36\sqrt{0,0986} = -0,51743$$

$N(d_1) = 0,34297$ ⇐ EXCEL ⇒ $N(d_2) = 0,30243$

$$c = 46,25\,.\,0,34297 - 50\,.\,e^{-0,262116\,.0,0986}\,.\,0,30243 = R\$\,1,13$$

$$p = 50\,.\,e^{-0,262116\,.0,0986} - 46,25 + 1,13 \cong R\$\,3,82$$

Auto Avaliação 01

Calcule o preço teórico de uma *call* pelo modelo de B&S.
DADOS: S = 35,00 X = 25,00 T = 0,5 (6 meses) r = 6%a.a (contínua)
σ = 60%a.a

Resposta: ($12,05)

Auto Avaliação 02

Use o Modelo de Black-Scholes para encontrar o preço para uma opção *call* com as seguintes entradas: (1) preço corrente da ação é \$22, (2) preço de exercício é \$20, (3) prazo para o vencimento é 6 meses, (4) taxa livre de risco anualizada é 5%, e (5) desvio padrão dos retornos da ação é 0,7.

Resposta:

Auto Avaliação 03

Assuma que lhe tenha sido dadas as seguintes informações sobre a *Purcell Industries*:

Preço Spot	\$ 15		
Vencimento da opção	6 meses	Preço Strike da opção	\$ 15
Variância do retorno da ação	0,12	Taxa livre de risco r_f	6% a.a.
d_1	0,24495	$N(d_1)$	0,59675
d_2	0,00000	$N(d_2)$	0,50000

De acordo com o modelo de precificação de opção de Black-Scholes, qual é o valor da opção?

Exercício 1

Calcule o preço teórico de uma call pelo modelo de B&S.
DADOS: S = 23,49 K = 24,00 T = 21 dias úteis r = 17,91% (contínua)
σ = 72%

Exercícios do Bessada p. 270 –BSM

Exercício 2

Calcule o preço teórico de uma put europeia pelo modelo de B&S.
DADOS: S = 39,00 K = 41,00 T = 21 dias úteis r = 16,10% (contínua)
σ = 36,07%

Exercícios do Bessada p. 270 – BSM

Exercício 3

Calcule o preço teórico de uma call de dólar pelo modelo de Garman & Kohlhagen.
DADOS: S = 3,00 K = 3,20 T = 1 ano r = 17,00% (contínua)
σ = 36,07% cupom cambial = 5% (contínua)

Exercícios do Bessada p. 270 –BSM

Outro Exemplo-B&S modificada

Qual o prêmio teórico de uma call europeia de dólar, com preço de exercício R$ 3,00/US$ e vencimento em 90 dias corridos (63 dias úteis).
Dados: câmbio à vista = R$ 2,86/US$ σ = 15,00% a.a.
r = 19% a.a. (taxa contínua, 252)
Cupom Cambial Limpo para 90 dias = 3% a.a. (linear, 360)

Primeiro precisamos transformar o cupom cambial para contínuo

Cupom cambial para 90 dias = 3% x 90/360 = 0,750% a.p.
Taxa ao ano (252 dias úteis): $(1+0{,}00750)^{252/63} - 1 = 3{,}0339\%\ a.a.$
Mudando para taxa contínua: $r_e = \ln(1+0{,}030339) = 2{,}989\% a.a.$

A equação de B&S pode ser modificada para o cálculo de preços teóricos de opções europeias sobre moedas, futuros e ações que pagam taxas contínuas de dividendos

Fórmula de Garman & Kohlhagen

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{2{,}86}{3}\right) + \left(0{,}19 - 0{,}02989 + \frac{0{,}15^2}{2}\right)\frac{63}{252}}{0{,}15\sqrt{\frac{63}{252}}} = -0{,}068$$

$$d_2 = -0{,}068 - 0{,}15\sqrt{\frac{63}{252}} = -0{,}143$$

$$c = 3{,}00\,.\,e^{-2{,}989x\frac{63}{252}}\ x\ N(-0{,}068) - 3{,}00\,.\,e^{-0{,}19x\frac{63}{252}}\ x\ N(-0{,}143) = R\$\ 0{,}074$$

As Gregas

As gregas
- 1.1 Delta
- 1.2 Gamma
- 1.3 Theta
- 1.4 Vega
- 1.5 Rhô

As Gregas

- O que convencionou-se a chamar de “Gregas” são medidas de sensibilidade do valor da opção às diferentes variáveis que compõem o preço de uma opção.
- O preço de uma opção é uma função não linear e, desta forma, seu comportamento não é tão facilmente previsível quanto o de ativos de comportamento linear.
- Iremos abordar as gregas segundo o modelo de Black & Scholes, apesar de que para diferentes modelos temos resultados diferentes.

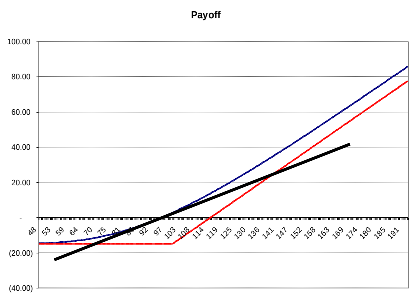
As Gregas - Delta (Δ)

É a razão de mudança no preço de uma opção em relação à mudança no preço da ação-objeto, num curto período de tempo

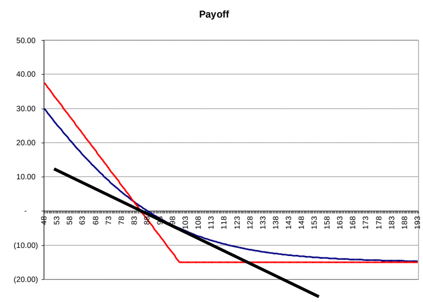
Exemplo: se uma opção tem DELTA 0,40, indica que cada R$ 1,00 que a ação se movimentar, as opções se movimentarão R$ 0,40

As Gregas - Delta (**<u>Δ</u>**)

O delta, procura medir **quanto varia o <u>preço</u> da opção para uma variação no <u>preço</u> do ativo subjacente:**

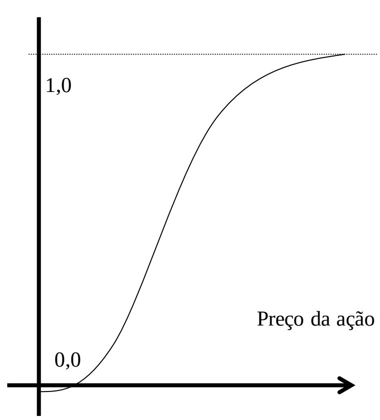


Delta de uma **Call**

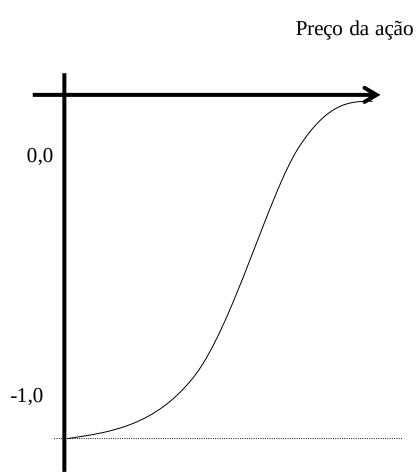


Delta de uma **Put**

As Gregas - Delta (**<u>Δ</u>**)



Delta Call



Delta Put

As Gregas - Delta (Δ)

- O delta de uma *Call* é positivo, enquanto que o delta de uma *Put* é negativo.
- O delta é local e depende do nível do spot.
- O delta de uma *Call* varia entre 0 e 1, enquanto que o de uma *Put* varia entre 0 e –1.
- O delta, por Back & Scholes, é o seguinte:
  - $\Delta_{call} = e^{-rt} N(d_1)$
  - $\Delta_{put} = e^{-rt} N(d_1) - 1$

As Gregas – Gamma (Γ)

É a razão de mudança no DELTA

Exemplo: se uma opção tem DELTA 0,40 e o GAMA de 0,10, indica que cada R$ 1,00 que a ação se movimentar, o DELTA passará de 0,40 para 0,50

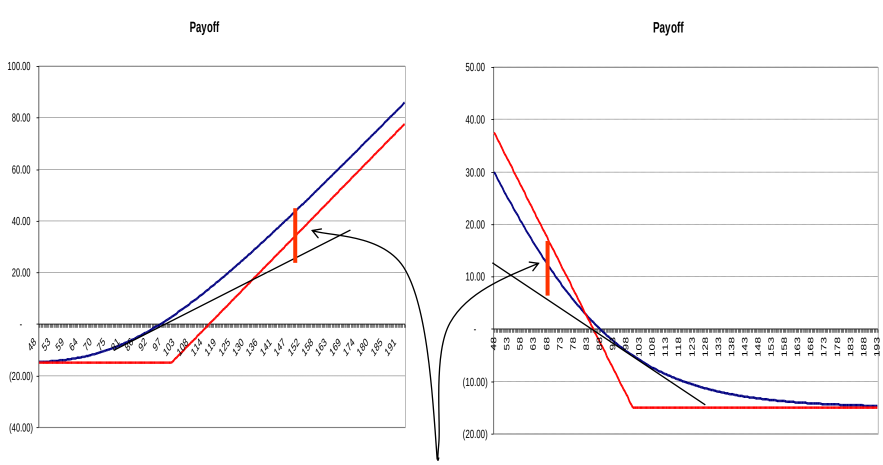
As Gregas – Gamma (Γ)

•O delta **não** é <u>constante</u> => é necessário, então, estudar-se seu comportamento, de forma a que possamos prever o que acontecerá com uma posição ao se observar uma variação no preço do ativo.

•O gamma é, matematicamente, a segunda derivada do preço da opção em relação ao preço do ativo. Ou seja, através do gamma podemos medir o **quanto variará o <u>delta</u> de uma opção, para uma determinada variação no <u>preço</u> do ativo.**

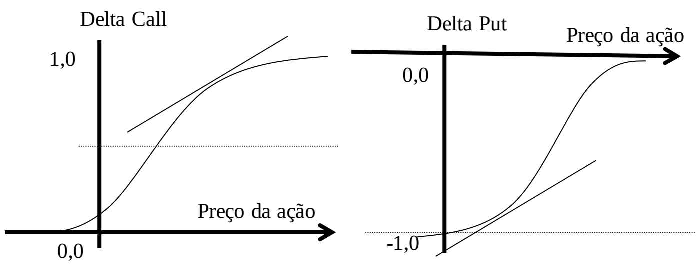
•O gamma, assim como o delta, não é constante. No entanto, ele é positivo tanto para uma *call* quanto para uma *put*.

As Gregas – Gamma (Γ)



variação do delta

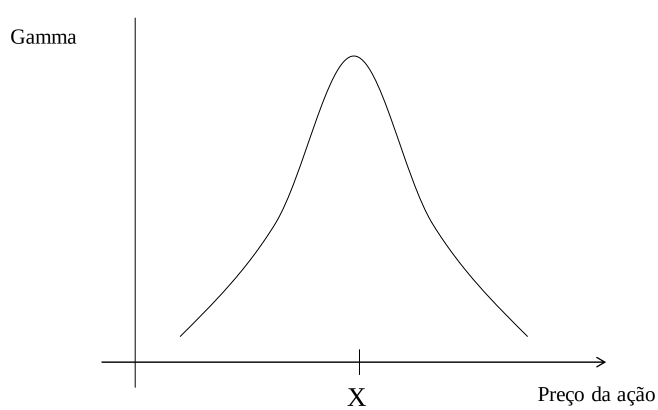
As Gregas – Gamma (Γ)



$$\Gamma = \frac{N'(d1)}{S * \sigma * \sqrt{T}}$$

As Gregas – Gamma (Γ)

O gamma é maior para opções no dinheiro (at-the-money), ou seja, para opções cujo preço de exercício é próximo ao preço do ativo:



As Gregas – Vega (Λ)

É a taxa de variação da opção decorrente de uma mudança na volatilidade.

Exemplo: se uma opção tem VEGA 0,16, indica que uma variação de 1,00% na volatilidade, a opção aumentará R$ 0,16

As Gregas – Vega (Λ)

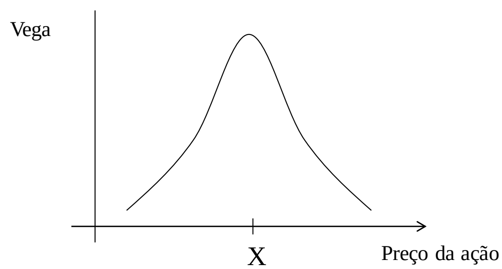
•Além do delta e do gamma que mostram a sensibilidade do preço da opção a variações no preço do ativo, é preciso saber qual a sensibilidade do preço desta opção em relação às outras variáveis.

•O vega, matematicamente, é a primeira derivada do preço da opção em relação à volatilidade. Desta forma, o vega nos diz o **quanto mudará o <u>preço</u> da opção para uma determinada variação na <u>volatilidade</u>** de precificação desta opção.

•Vale a pena lembrar que se pensar no vega, teoricamente, é uma contradição ao modelo de Black & Scholes, já que um dos pressupostos do modelo é de volatilidade constante ao longo do tempo.

As Gregas – Vega (Λ)

O vega, assim como o gamma, é maior para opções no dinheiro (at-the-money), ou seja, para opções cujo preço de exercício é próximo ao preço do ativo:



As Gregas – Vega (Λ)

•O Vega é importante para se pensar em estruturas de compra ou venda de volatilidade. O vega é instantâneo, ou seja, seu valor muda de acordo com o preço do ativo.

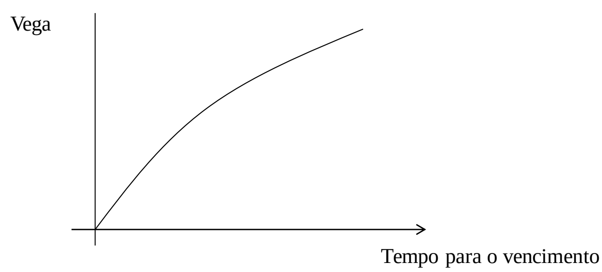
•Só se entende pensar no vega lembrando que o modelo de Black & Scholes tem de fato um falha em um de seus pressupostos, e o que se observa na prática é que tanto a volatilidade histórica do ativo quanto a implícita da opção podem apresentar variações significativas ao longo do tempo.

A fórmula do vega é dada por:

$$\Lambda = S * \sqrt{T} * N'(d1)$$

As Gregas – Vega (Λ)

Pela fórmula fica claro que o vega é maior quanto maior o prazo de vencimento da opção. O vega, assim como o gamma, é sempre positivo, tanto para uma call quanto para uma put.



As Gregas – Theta (Θ)

É quanto a opção perde de valor a cada dia que passa.

Exemplo: se uma opção tem THETA -0,04, indica que cada dia que passar a opção perderá R$ 0,04 de valor

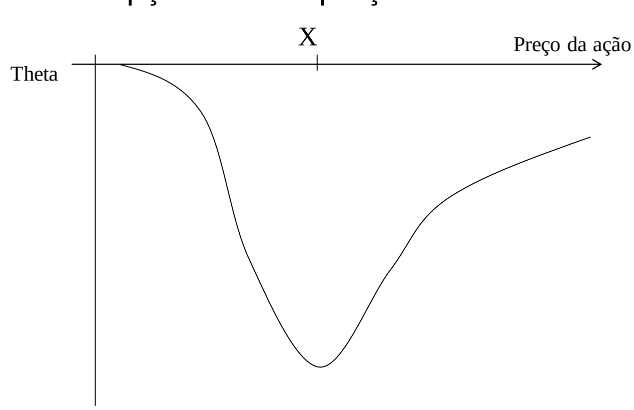
As Gregas – Theta (Θ)

•O theta de uma opção procura observar o quanto variará o preço desta opção com o passar do tempo. O padrão é observar-se o **quanto variará o <u>preço</u> da opção com o <u>passar de um dia</u>**.

•O theta de uma opção quer nos dizer qual é o "custo de carregamento" por estar comprado em uma opção e o mercado não se mover da maneira que prevemos (desconsiderando todas as outras mudanças nas diversas variáveis que afetam o preço da opção).

As Gregas – Theta (Θ)

O theta de uma opção possui relação inversamente proporcional ao gamma. Desta forma, podemos deduzir que o theta é sempre negativo, tanto para uma call quanto para uma put, e que é maior (em módulo) quanto mais próximo o preço de exercício da opção está do preço do ativo.



As Gregas – Theta (Θ)

O theta para uma call e para uma put possuem fórmulas diferentes. Para uma call temos a seguinte fórmula:

$$\Theta_{call} = -\frac{S * N'(d1) * \sigma}{2 * \sqrt{T}} - r * X * e^{-r*T} * N(d2)$$

E para uma put:

$$\Theta_{put} = -\frac{S * N'(d1) * \sigma}{2 * \sqrt{T}} + r * X * e^{-r*T} * N(-d2)$$

As Gregas – Rhô (ρ)

É a taxa de variação da opção decorrente de uma mudança na taxa de juros.

Exemplo: se uma opção tem RHO 0,74, indica que uma alta de 1,00% na taxa de juros (SELIC) a opção aumentará R$ 0,74.

As Gregas – Rhô (ρ)

•O Rhô vai nos dizer o **quanto mudará o preço da opção para uma mudança na taxa de juros**.

•É importante dizer que o rhô é a variável que menos afeta o preço da opção. Ou seja, ela é a variável que um *trader* de opções dará menos importância. Isto não quer dizer que ele seja desprezível. No entanto, caso um trader tenha duas possibilidades de estratégias, e tenha que optar por estar exposto em rhô ou em vega, salvo raras exceções o trader dará preferência à posição no qual o desconforto fique do lado do rhô.

As Gregas – Rhô (ρ)

Para uma call temos:

$$Rh\hat{o}_{call} = X * T * e^{-r*T} * N(d2)$$

E para uma put:

$$Rh\hat{o}_{put} = -X * T * e^{-r*T} * N(-d2)$$

Algumas Conclusões Importantes

•A primeira é a de que como apenas as opções possuem **gamma, vega, theta e rhô, se quisermos hedgear estas gregas teremos que usar necessariamente outras opções para fazê-lo.**

•O delta, pode ser tratado como x% de equivalente ao ativo objeto. Desta forma, **podemos utilizar o ativo objeto além de opções, para fazer o hedge de <u>delta</u> de uma opção qualquer**. É importante deixar claro que ao utilizar-se do ativo objeto para hedgear o delta você estará sempre deixando as outras gregas expostas, e ao utilizar uma outra opção para o hedge, você nunca (ou dificilmente) conseguirá hedgear todas as gregas, a não ser que utilize a mesma opção.

<u>“Break-even” gamma-theta</u>

•Uma relação importante é a existente entre o gamma, o vega e o theta. Para qualquer opção comprada, sempre teremos gamma e vega positivos e theta negativo. Teremos uma posição inversa se vendermos uma opção.

•Isto é importante para observamos que estar comprado em gamma tem o mesmo princípio de estar comprado em vega ou ter theta negativo. O que isto quer dizer?

•Que quando você está com gamma positivo você quer que o mercado se mexa, a fim de aproveitar da imperfeição do delta e estar sempre *hedgeando* a sua posição de maneira vantajosa.

“Break-even” gamma-theta

•O gamma positivo é sempre favorável à sua posição, ou seja, se o mercado sobe você vai ficando mais comprado e se o mercado desce você vai ficando menos comprado. Desta forma, para manter o delta neutro, você estará sempre vendendo na alta e comprando na baixa.

•Se você quer que o mercado se mexa, então você quer volatilidade, e desta forma faz sentido o observado de que ao se comprar gamma você compra vega.

•No entanto, o custo desta estratégia é o theta.

“Break-even” gamma-theta

•Para cada dia que passa, aconteça o que acontecer, mantendo-se todas as outras variáveis constantes você estará sempre perdendo valor em função do theta.

•Então, se o mercado não se comportar como o previsto, e ele não se mexer o suficiente para que você possa se aproveitar do gamma a seu favor, você estará perdendo dinheiro por causa do theta.

•Podemos assim deduzir que deva existir um “x%” de variação no preço do ativo no qual ele oscile pelo menos o suficiente para que ao se fazer o hedge da sua posição você ganhará dinheiro para pagar o theta daquele dia. **Este “x%” de oscilação é o *break-even* gamma-theta.**

“Break-even” gamma-theta

•Este *break-even* gamma-theta quer dizer mais ou menos o seguinte: se você acha que o mercado vai se mexer mais do que o x%, você deve estar comprado em gamma, já que você vai ganhar mais dinheiro do que você vai perder com o theta.

•Se, por outro lado, você acha que o mercado vai se mexer menos do que este x%, você deve estar vendido em gamma, e se apropriar do theta, já que ele vai lhe dar mais dinheiro do que você poderá ganhar se ficar sempre fazendo o hedge ocasionado por este gamma.

“Break-even” gamma-theta

•Ao fazer uma estratégia de gamma contra theta o que você está querendo fazer, na verdade, é uma estratégia de volatilidade.

•Você vai, em última análise, estar comprando gamma se a volatilidade implícita que você está observando no mercado for menor do que sua expectativa de volatilidade futura. Se você acha que o mercado vai se mexer, você estará comprando volatilidade (quer ganhar com o gamma e o vega) e se você acha que o mercado vai ficar parado, você venderá volatilidade (para ganhar com o theta).

•A única possibilidade num mercado perfeito e completo é aquela na qual a oscilação do ativo é exatamente a que proporciona dinheiro devido ao hedge ocasionado pelo gamma que pague exatamente o theta do dia.

Quando você compra uma opção

- O delta é **positivo**; uma alta na ação é prejudicial.
- O gama é **positivo**; uma alta no delta negativo é prejudicial.
- Theta é **negativo**, a passagem do tempo é favorável.
- Vega é **positivo**, pois o aumento da volatilidade torna a opção que você comprou mais cara.

As Gregas – RESUMO

DELTA – mede a sensibilidade da opção em relação ao preço do ativo objeto

GAMMA – mede o quanto o delta varia para cada alteração no preço do ativo-objeto

TETA – mede o impacto do tempo em relação ao preço da opção.

RHÔ – mede o impacto na taxa de juros no preço da opção.

VEGA – mede o efeito da volatilidade no preço da opção

Delta de uma Opção

EXEMPLO		
Commodity	milho	450
Quantidade	200	
Opção de Venda – put	0,8300	
cotação futura	19,55	
Preço de exercício X	20	
Taxa de juro anual	15%	
Volat. do ctr Fut (ano)	24%	
Prazo em DU	25	
DELTA - Δ	-0,59696	
Quantidade de opções p/ comprar	335	
supondo queda no dia seguinte D+1	1%	
cotação futura	19,35	
ajuste diário	18.000,00	
preço teórico na opção	0,95	BS

$$e^{-rt} x N(d_1) - 1$$

$$\Delta put = e^{-rt} x N(d_1) - 1$$

Exercício 1 – Bessada p.334

O que ocorre com uma opção call em que o delta é 0,70 se a ação subir 0,50?

Exercício 2 – Bessada p.334

O que ocorre com uma opção put em que o delta é -0,50 se a ação subir 0,30?

Problemas Desafios

Use o Modelo de Black-Scholes para encontrar o preço de uma opção *call* com as seguintes entradas: (1) preço corrente da ação é \$30, (2) preço de exercício é \$35, (3) tempo até o vencimento são 4 meses, (4) taxa anualizada livre de risco é 5%, e (5) variância dos retornos da ação é 0,25.

O Método Binomial

67

Modelo Binomial

- As opções americanas são aquelas que podem ser exercidas a qualquer instante até o vencimento.

- Não há soluções analíticas!

- Artigo: **Cox,Ross e Rubinstein (79)**
  - Solução Numérica
  - Modelo binomial (árvore binomial) é utilizado para o apreçamento dessas opções.

O modelo Binomial é mais flexível que o modelo BSM (Black, Scholes e Merton) e usa uma matemática elementar para o cálculo do valor da opção. De acordo com a *Financial Accounting Standards Board* (FASB) esse modelo pode acomodar melhor a expectativa de volatilidade e de dividendos sobre o período do contrato de opções.

Pode-se usar o modelo para precificar qualquer tipo de derivativo!

Premissas Básicas

1. O ativo-objeto segue um *processo aleatório binomial* de geração de retornos. Assim, o ativo-objeto só pode apresentar dois valores no futuro:

   S_u = S.u – no caso de subida (*up*)

   S_d = S.d – no caso de descida (*down*)

   A <u>incerteza</u> decorre do fato de que não se sabe antecipadamente qual dos dois valores este ativo-objeto pode assumir.

EXEMPLO – Suponhamos que uma ação esteja cotada a S = $ 100, na data zero e que poderá assumir os valores abaixo na data 1:

S_0 = $ 100 → S_u = $ 103

S_0 = $ 100 → S_d = $ 99

2. A taxa livre de risco r_f é constante.
3. Os indivíduos podem emprestar e tomar emprestado à mesma taxa.
4. Não existem impostos, custos de transação ou requerimentos de margem.
5. A venda a descoberto é permitida sem restrições.

Como encontrar o valor da opção

Considere que a ação anterior tenha uma opção *call* com vencimento na data T e preço de exercício X = $ 102,00.

Valor intrínseco : Máximo[(S – X);0], então temos:

prêmio f → f_u = $ 1,00 = Máximo[S_u – X;0]

prêmio f → f_d = $ 0,00 = Máximo[S_d – X;0]

O valor da opção no momento de exercício, T, é o VALOR ESPERADO de seus valores intrínsecos nessa data.

$$VALOR\ ESPERADO = p\ x\ 1{,}00 + q\ x\ 0{,}00$$

onde **p** e **q** são as <u>probabilidades</u> dos eventos *subida* e *descida,* respectivamente.

Agora o preço teórico na data inicial (prêmio) é o <u>valor presente</u> desse valor esperado.

$$prêmio = Valor\ Esperado\ * fator\ de\ desconto$$

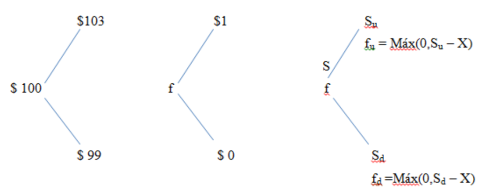
O fator de desconto será considerado em capitalização contínua!!

Avaliação de risco neutro

Quais são as probabilidades dos movimentos para cima **p** e para baixo **q**?

Podemos escolher estas probabilidade p e q de tal maneira que podemos valorar opções (e todos os outros derivativos) assumindo que vivemos num *mundo livre de risco*. Esta hipótese significa que todos os fluxos de caixa podem ser descontados à taxa r_f, resolvendo desta forma uma grande dificuldade em finanças que é a taxa de desconto.

Este método de avaliar derivativos assumindo um mundo livre de risco é chamado de **avaliação de risco neutro**. O uso desta abordagem não é apenas válida no mundo imaginário livre de risco, mas também no mundo real.



Carteira Livre de Risco

Vamos determinar o prêmio da *call* de uma ação (ativo-objeto), com preço de exercício X = $ 102 e data de exercício T. Para isso:

1 – montamos uma carteria formada pela compra de Δ ativos-objetos.
2 – vendemos (lançamos) uma *call* desse mesmo ativo-objeto.

Carteira livre de risco

Qual o número Δ de ativos-objetos de forma que a carteira livre de risco apresente um *resultado* constante?

Na data do exercício, T:

- Se o preço da ação S_T for $ 103, o VI da *call* será $ 1, o valor da "carteira" é: $ 103 x Δ - $ 1.
- Se o preço da ação S_T for $ 99, o VI da *call* será $ 0, o valor da "carteira" é: $ 99 x Δ.

Como para qualquer valor da ação, o valor da carteira sem risco não muda, então:

$ 103 x Δ - $ 1 = $ 99 x Δ ⇒ Δ = 0,25

valor da carteira = $ 99 x 0,25 = $ 24,75

$$S_0^{carteira} = S_T\, e^{-r_f T}$$

Se r_f = 2,5% no período T (capitalização contínua):

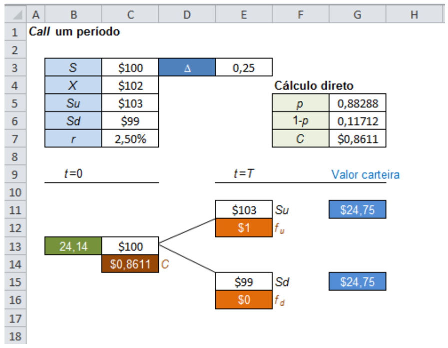
$S_0^{carteira} = S_T\, e^{-r_f T} = \$\,24{,}75\, e^{-0{,}025\,.1} = \$\,24{,}14$

PLANILHA – Call 1 período

$ 100 x Δ – prêmio = $ 24,14

$ 25– prêmio = $ 24,14 ⇒ prêmio = $ 0,86

EXEMPLO com Planilha



PLANILHA – Call 1 período

Exercício

O preço das ações da *Lett Incorporated* atualmente é de $ 50, mas estima-se que haverá uma alta por um fator de 1,5 ou uma queda por um fator de 0,7 no fim do ano. Há uma opção de compra das ações da *Lett* com um preço de exercício de $ 55 e vencimento de 1 ano a partir de agora. Quais são os possíveis preços das ações no fim do ano?. Qual será o ganho da opção de compra se o preço das ações subir?. E se o preço das ações cair?. Se vendermos uma opção de compra, quantas ações, da *Lett*, teremos de comprar para criar uma carteira com *hedge sem risco* composta de opções e ações ? Qual é o valor dessa carteira? Se a taxa anual livre de risco é 6%, quanto vale hoje a carteira isenta de risco (assumindo a capitalização diária)? Qual é o valor corrente da opção de compra?

Respostas: ($ 75 e $ 35); ($ 20); ($ 0); (0,5); ($ 17,50); ($ 16,48); ($ 8,52).

Solução do Exercício

S = $ 50 u = 1,5 S(u) = $ 75 d = 0,7 S(d) = $ 35
X = $ 55 vencimento = T = 1 ano

50 → 75, 35 ? = → 20 (=75-55), 0

$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = \frac{20-0}{75-35} = \frac{20}{40} = 0{,}5$

O valor da *carteira com hedge sem risco* se a ação subir:

Δ . S(u) – f_u = 0,5 . 75 – 20 =17,50

O valor da carteira com hedge se a ação cair:

Δ S(d) – f_d = 0,5 . 35 – 0 =17,50

Se r_{RF} = 6% a.a., o tempo até o vencimento T = 1 ano, e o número de períodos n em que foi dividido o T(nesse caso n = 1), o valor atual da *carteira com hedge sem risco*, será:

$PV_{\text{carteira com hedge sem risco}} = \frac{17{,}50}{\left(1+\frac{r_{RF}}{365}\right)^{365\left(\frac{T}{n}\right)}} = \frac{17{,}50}{\left(1+\frac{0{,}06}{365}\right)^{365\left(\frac{1}{1}\right)}} = \frac{17{,}50}{1{,}06183131} = \$\,16{,}48$

O valor corrente da opção de compra, isto é, o seu prêmio atual, é:

f_{atual} = Δ . S - $PV_{\text{carteira com hedge sem risco}}$ = 0,5 x 50 – 16,48 = $ 8,52.

Fórmulas

$$prêmio = e^{-rT}\ [p\,.\,f_u + (1-p)\,.\,f_d]$$

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

q = (1 – p) = $1 - \frac{e^{rT} - d}{u - d}$

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ $\Leftarrow$ proveniente do GBM

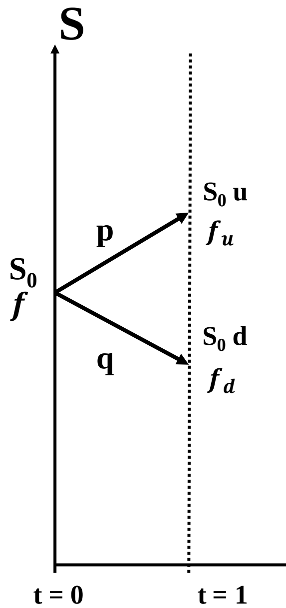
$$d = {}^{1}/_{u}$$

Árvore Binomial

$f = prêmio$

$f_u = Valor\ Intrínseco = Máximo\ [(S_0u\ - X); 0]$

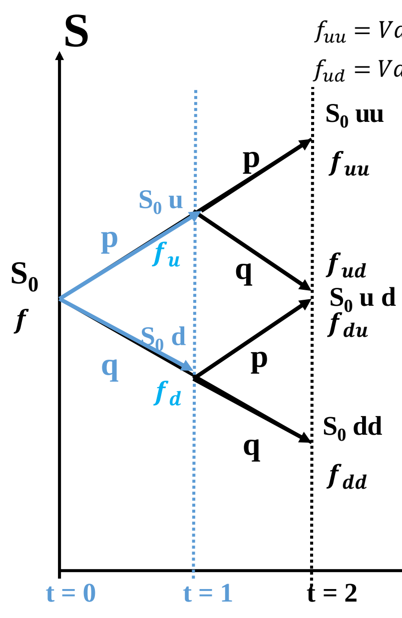
$f_d = Valor\ Intrínseco = Máximo\ [(S_0d\ - X); 0]$



Método Binomial

$f_{uu} = Valor\ Intrínseco = Máximo\ [(S_0uu\ - X); 0]$

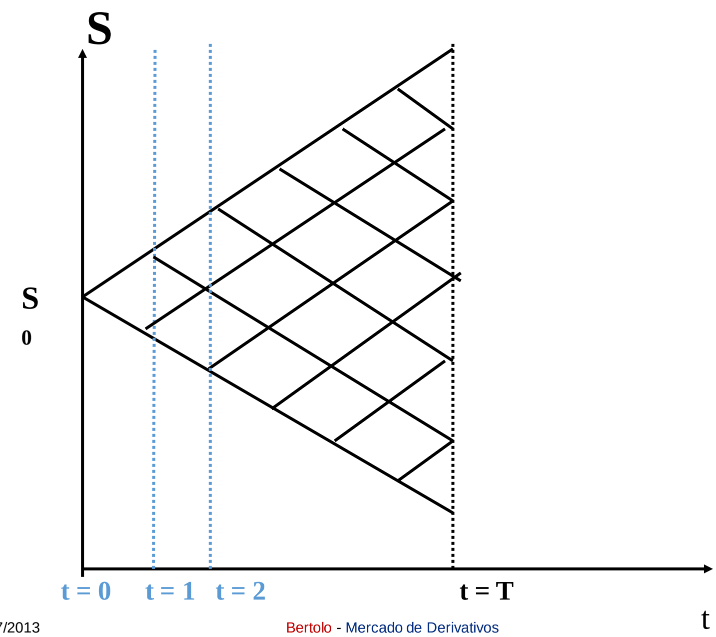
$f_{ud} = Valor\ Intrínseco = Máximo\ [(S_0ud\ - X); 0]$



$$f_u = \underbrace{e^{-r_f \Delta t}}_{\text{Fator desconto}} \overbrace{[pf_{uu} + qf_{ud}]}^{\text{Valor Esperado}}$$

$$f_d = \underbrace{e^{-r_f \Delta t}}_{\text{Fator desconto}} \overbrace{[pf_{du} + qf_{dd}]}^{\text{Valor Esperado}}$$

Método Binomial



Auto-avaliação – Em sala

A *Toin Toin* empresa de telefonia celular possui um preço corrente de ações de $ 30. Você precisa achar o valor de uma opção de compra com um preço de exercício de $ 32 que vence em 3 meses. Utilize o modelo binomial com 1 período até o vencimento. O fator para um aumento no preço das ações é u = 1,15; o fator para um movimento de queda é d = 0,85. Quais são os possíveis preços das ações na data do vencimento? ($ 34,50 ou $ 25,50). Quais são os possíveis ganhos da opção no vencimento? ($ 2,50 ou $ 0). Quais são os p e q? (0,5422 e 0,4429). Qual é o valor corrente da opção? (assuma que cada mês é 1/12 de um ano) ($ 1,36).

Exercício 1

Calcule o preço de uma *call* americana de exercício R$ 105,00.
DADOS:
Preço atual do ativo-objeto (S): R$ 100,00
Volatilidade do ativo-objeto (σ): 20% a.a.
Taxa de juros do ativo livre de risco (r): 10% a.a. contínua
Tempo para o vencimento (t): 2 meses
Passo: 1 mês

PLAN Call 2 períodos A e Call 2 períodos B

Resp: R$ 2,22

S = 100 X = 105 Δt = 1/12 = 0,08333 σ = 0,20

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.0594$ d = 1/u = 0,9439 r = 10,00% a.a. (contínua)

$p = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d} = \frac{e^{0,10\,.0,08333}-0,9439}{1,0594} = 0,558$ q = 1 – p = 1 – 0,558 = 0,442

Su = 100 . 1,0594 = \$105,94
Suu = 105,94 . 1,0594 = \$112,24 f_{uu} = \$ 7,24
Sud = 105,94 . 0,9439 = \$100,00 f_{ud} = \$ 0,00
Sd = 100 . 0,9439 = \$94,39
Sdu = 94,39 . 1,0594 = \$100,00 f_{du} = \$ 0,00
Sdd = 94,39 . 0,9439 = \$ 89,09 f_{dd} = \$ 0,00

$$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + qf_{ud}] = e^{-0,10.0,08}[0,558x7,24 + 0,442x0,00] = \$4,01$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{du} + qf_{dd}] = e^{-0,10.0,08}[0,558x0,00 + 0,442x0,00] = \$0,00$$

$$p = e^{-r\Delta t}[pf_u + qf_d] = e^{-0,10.0,08}[0,558x4,01 + 0,442x0,00] = \$2,22$$

Exercício 2

Calcule o preço de uma *put* europeia de exercício R$ 120,00.
DADOS:
Preço do ativo-objeto (S): R$ 120,00
Volatilidade do ativo-objeto (σ): 15% a.a.
Taxa de juros do ativo livre de risco (r): 10% a.a. contínua
Tempo para o vencimento (t): 2 meses
Passo: 1 mês

PLAN Put 2 períodos A

Resp: R$ 1,68

S = 120 X = 120 Δt = 1/12 = 0,08333 σ = 0,15

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.0443$ d = 1/u = 0,9576 r = 10,00% a.a. (contínua)

$p = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d} = \frac{e^{0,10\,.0,08333}-0,9576}{1,0443-0,9576} = 0,5858$ q = 1 – p = 1 – 0,5858 = 0,4142

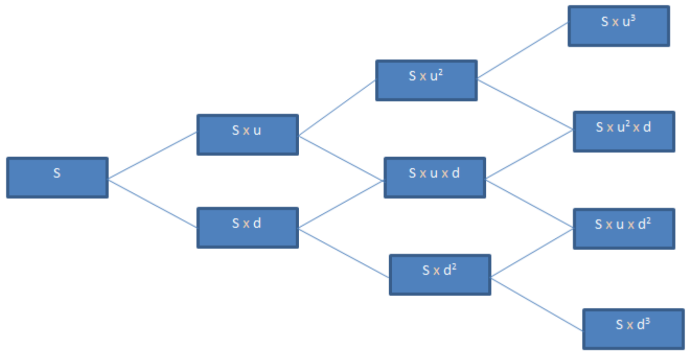
Su = 120 . 1,0443 = \$125,31
Suu = 125,31 . 1,0443 = \$130,86 VI = \$ 0,00
Sud = 125,31 . 0,9576 = \$120,00 VI = \$ 0,00
Sd = 100 . 0,9576 = \$114,91
Sdu = 114,91 . 1,0443 = \$120,00 VI = \$ 0,00
Sdd = 114,91 . 0,9576 = \$ 110,04 VI = \$ 9,96

$$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + qf_{ud}] = e^{-0,10.0,08}[0,5858x0,00 + 0,4142x0,00] = \$0,00$$

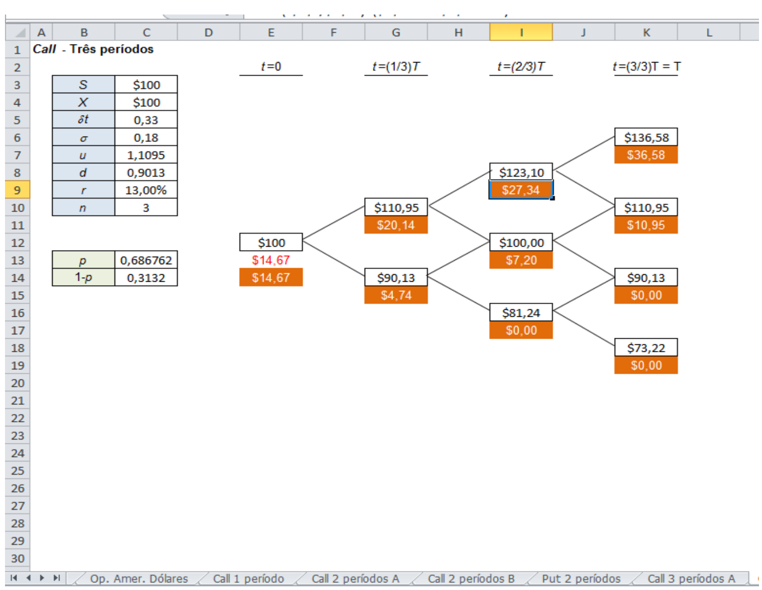
$$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + qf_{dd}] = e^{-0,10.0,08}[0,5858x0,00 + 0,4142x9,96] = \$4,09$$

$$p = e^{-r\Delta t}[pf_u + qf_d] = e^{-0,10.0,08}[0,5858x0,00 + 0,4142x4,09] = \$1,68$$

Árvore de 3 passos



Exemplo de Árvore de 3 períodos



PLANILHA – Call 3 períodos B

Exemplo de Árvore de 3 períodos

IMES CATANDUVA·SP

Call - Dois períodos

S	$100
X	$100
δt	0,33
σ	0,18
u	1,1095
d	0,9013
i	13,88%
r	13,00%
n	3

p	0,68673
1-p	0,31327

Ação	0	1	2	3			
0	$100,00	$110,95	$123,10	$136,58			
1		$90,13	$100,00	$110,95			
2			$81,23	$90,13			
3				$73,22			
4							
5							
6							

Call	0	1	2				
0	$14,67	$20,14	$27,34	$36,58			
1		$4,74	$7,20	$10,95			
2			$0,00	$0,00			
3				$0,00			
4							
5							
6							

PLANILHA – Call 3 períodos C

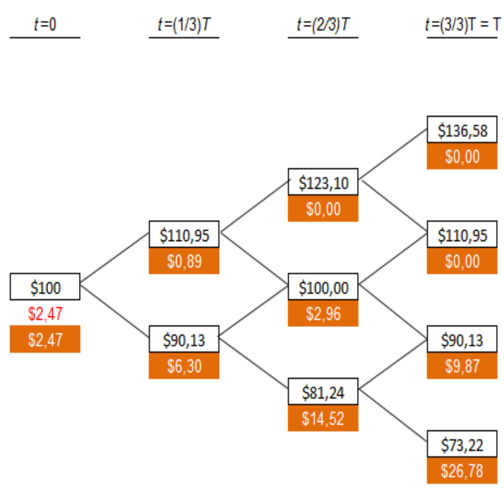
Exemplo de Árvore de 3 períodos

IMES CATANDUVA·SP

Put - *Três períodos*

S	$100
X	$100
δt	0,33
σ	0,18
u	1,1095
d	0,9013
r	13,00%
n	3

p	0,686762
1-p	0,3132



PLANILHA – Put 3 períodos A

CALL Americana de Moeda

Cálculo do prêmio teórico de uma opção de compra de euro com dólares X = US$/ €1, com vencimento em 90 dias corridos.

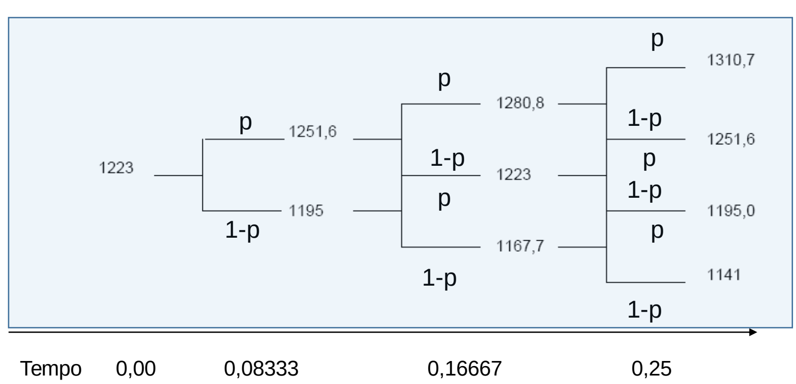
- S = US$ 1,223/ €1= US$ 1223/ €1000
- X = US$1,25/ €1= US$ 1250 / €1000
- t = 90 dias corridos = 0,25 ano
- r = 1,242% ao ano (contínua)
- r* = 1,735% ao ano (contínua)
- σ = 8% ao ano
- Δ t = 1 mês= 0,0833 ano calculando u, d e p, tem-se:
- u = $e^{0{,}08\ 0{,}08333}$ =1,0234 , d = 1/u = 0,9771

$$p = \frac{e^{-(r-r^*).\Delta t} - d}{u-d} = \frac{e^{-(0{,}01242-0{,}01735).0{,}08333} - 0{,}9771}{1{,}0234-0{,}9771} = 0{,}\ 4857$$

- 1-p = 0,5143

CALL Americana de Moeda

- Montando a árvore

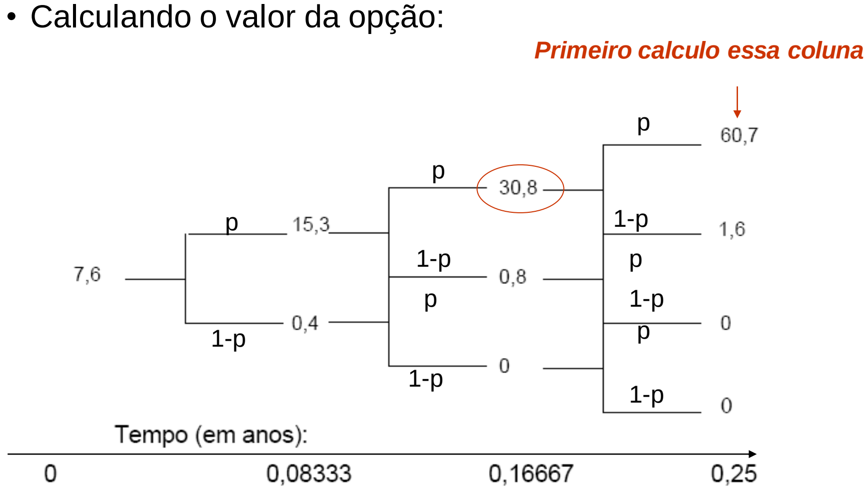


CALL Americana de Moeda

- Calculando o valor da opção (prêmio):
  - Método *backward* (trás para frente)
    - Na maturidade em todos os nós só tenho duas decisões: MAX [S-X;0]
    - Antes da maturidade e em cada nó da árvore binomial dos períodos anteriores, é feita uma **comparação** entre
      - **esperar** (valor esperado no período seguinte trazido para valor presente) e
      - **exercer** (S-X: diferença entre a cotação da moeda e o preço de exercício, permanecendo o maior).

CALL Americana de Moeda

- Calculando o valor da opção:

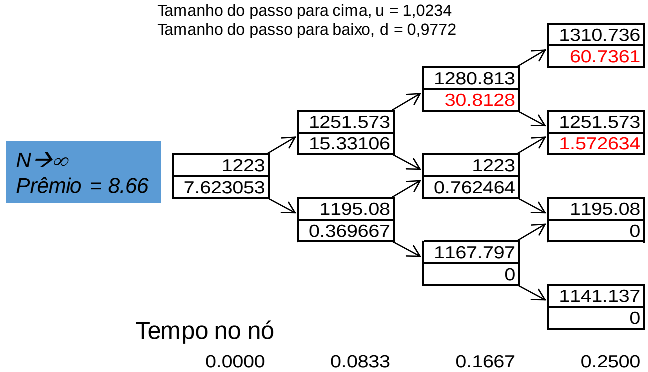


CALL Americana de Moeda

- Exemplo:
  - Esperar: $[(60,7x0,4857)+(1,6x0,5143)]e^{-0,01242x0,08333} = 30,27$
  - Exercer: 1280,8−1250=30,8
  - Portanto **exerce** e a opção fica 30,8.
- Repetindo o mesmo procedimento até a data zero, chega-se ao prêmio teórico da opção de US$ 7,6/ €1000.

CALL Americana de Moeda

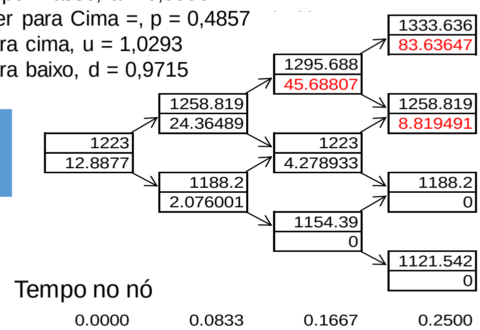
Em cada nó:
Valor superior = Preço do Ativo Subjacente (Objeto)
Valor Inferior = Preço da Opção (Prêmio)
Os valores em vermelho são os resultados do exercício anterior
Preço de Exercício (Strike) = 1.250
Fator de Desconto por Passo = 0,9990
Passo de tempo, dt = 0,0833 anos, 30,42 dias
Fator de Crescimento por Passo, a = 0,9996
Probabilidade de Mover para Cima =, p = 0,4853
Tamanho do passo para cima, u = 1,0234
Tamanho do passo para baixo, d = 0,9772



CALL Americana de Moeda

Em cada nó:
Valor superior = Preço do Ativo Subjacente (Objeto)
Valor Inferior = Preço da Opção (Prêmio)
Os valores em vermelho são os resultados do exercício anterior
Preço de Exercício (Strike) = 1.250
Fator de Desconto por Paso = 0,9990
Passo de tempo, dt = 0,0833 anos, 30,42 dias
Fator de Crescimento por Passo, a = 0,9996
Probabilidade de Mover para Cima =, p = 0,4857
Tamanho do passo para cima, u = 1,0293
Tamanho do passo para baixo, d = 0,9715

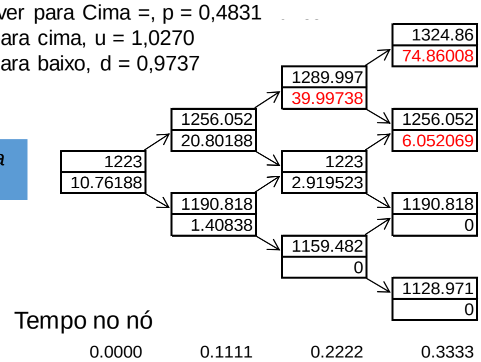
Aumentando volatilidade para 10%



CALL Americana de Moeda

Em cada nó:
Valor superior = Preço do Ativo Subjacente (Objeto)
Valor Inferior = Preço da Opção (Prêmio)
Os valores em vermelho são os resultados do exercício anterior
Preço de Exercício (Strike) = 1.250
Fator de Desconto por Paso = 0,9986
Passo de tempo, dt = 0,1111 anos, 40,56 dias
Fator de Crescimento por Passo, a = 0,9995
Probabilidade de Mover para Cima =, p = 0,4831
Tamanho do passo para cima, u = 1,0270
Tamanho do passo para baixo, d = 0,9737

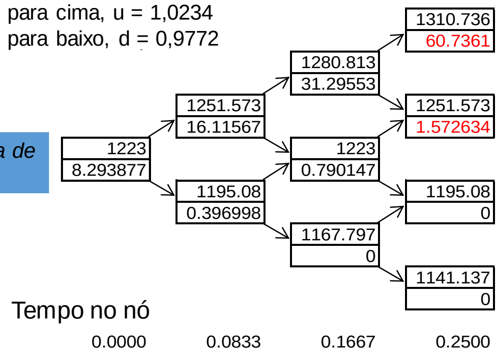
Aumentando T para 120 dias



CALL Americana de Moeda

Em cada nó:
Valor superior = Preço do Ativo Subjacente (Objeto)
Valor Inferior = Preço da Opção (Prêmio)
Os valores em vermelho são os resultados do exercício anterior
Preço de Exercício (Strike) = 1.250
Fator de Desconto por Paso = 0,9981
Passo de tempo, dt = 0,0833 anos, 30,42 dias
Fator de Crescimento por Passo, a = 1,0004
Probabilidade de Mover para Cima =, p = 0,5034
Tamanho do passo para cima, u = 1,0234
Tamanho do passo para baixo, d = 0,9772

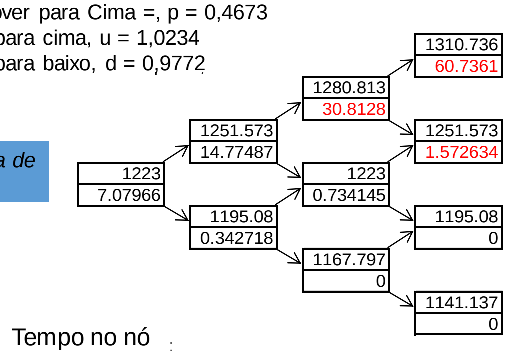
Aumentando taxa de juros r em 1%



CALL Americana de Moeda

Em cada nó:
Valor superior = Preço do Ativo Subjacente (Objeto)
Valor Inferior = Preço da Opção (Prêmio)
Os valores em vermelho são os resultados do exercício anterior
Preço de Exercício (Strike) = 1.250
Fator de Desconto por Paso = 0,9990
Passo de tempo, dt = 0,0833 anos, 30,42 dias
Fator de Crescimento por Passo, a = 0,9888
Probabilidade de Mover para Cima =, p = 0,4673
Tamanho do passo para cima, u = 1,0234
Tamanho do passo para baixo, d = 0,9772

Aumentando taxa de juros r em 1%*



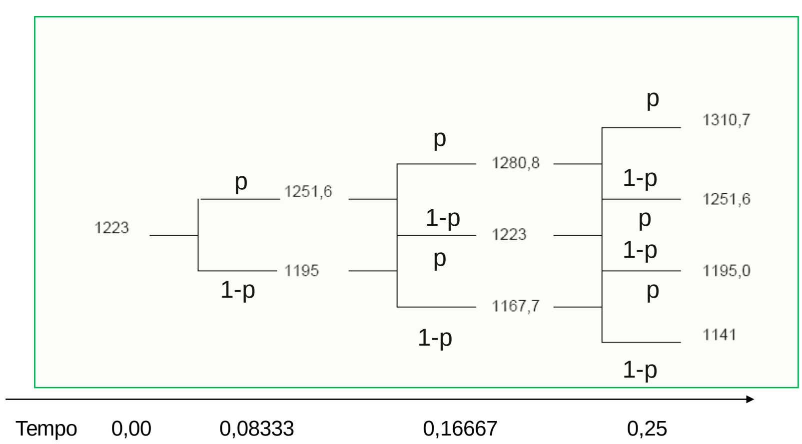
PUT Americana de Moeda

- Cálculo do prêmio teórico de uma opção de venda de euro com dólares E= US$ 1,22/ €1, com vencimento em 90 dias corridos.

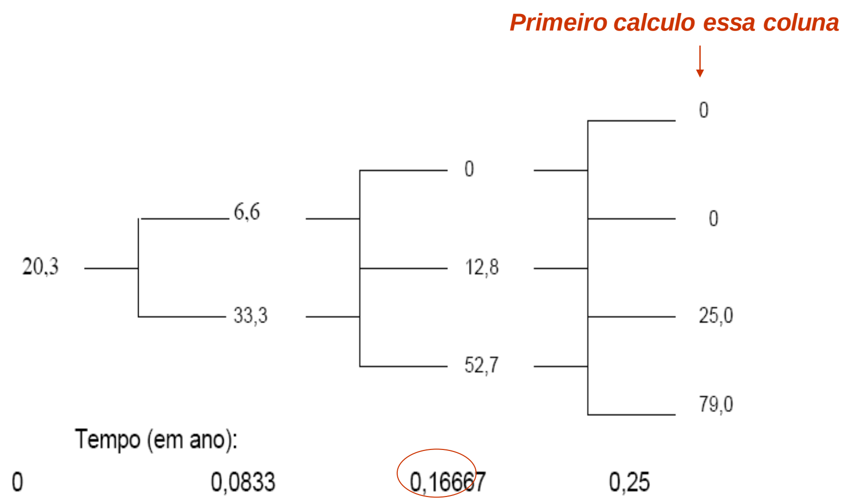
- A árvore binomial da taxa de câmbio é a mesma do exemplo anterior.

PUT Americana de Moeda

- Montando a árvore



PUT Americana de Moeda



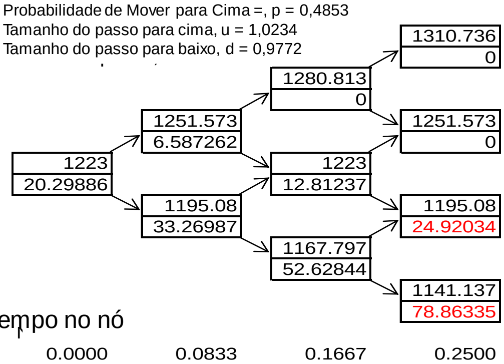
PUT Americana de Moeda

- Exemplo:
  - Esperar: $[(25x0,4857)+(79x0,5143)]e^{-0,01242x0,08333} = 52,7$
  - Exercer: 1220−1.167,7=52,3
  - Portanto, **espera** e a opção fica 52,7.
- Repetindo o mesmo procedimento até a data zero, chega-se ao prêmio teórico da opção de US$ 20,3/ € 1000.

PUT Americana de Moeda

Em cada nó:
Valor superior = Preço do Ativo Subjacente (Objeto)
Valor Inferior = Preço da Opção (Prêmio)
Os valores em vermelho são os resultados do exercício anterior
Preço de Exercício (*Strike*) = 1.220
Fator de Desconto por Paso = 0,9990
Passo de tempo, dt = 0,0833 anos, 30,42 dias
Fator de Crescimento por Passo, a = 0,9996
Probabilidade de Mover para Cima =, p = 0,4853
Tamanho do passo para cima, u = 1,0234
Tamanho do passo para baixo, d = 0,9772

N→∞
Prêmio = 18.69



Exercício 3

Calcule o preço de uma put americana de exercício R$ 30,00.
DADOS:
Preço do ativo-objeto (S): R$ 30,00
Volatilidade do ativo-objeto (σ): 40% a.a.
Taxa de juros do ativo livre de risco (r): 26% a.a. contínua
Tempo para o vencimento (t): 2 meses
Passo: 1 mês
Essa put valerá mais ou menos que uma put europeia com as mesmas características? Justifique

Resp: R$ 1,39. Vale mais porque ela fornece um direito a mais ao seu titular, que é o direito de exercê-la a qualquer momento.

Tarefa para casa #01

O preço da ação da *Bike Cycle* está agora $20. Você precisa encontrar o valor de uma opção *call* com um preço de exercício de $22 que vence daqui a 2 meses. Você quer usar o modelo binomial com 2 períodos (cada período é um mês). Seu assistente calculou que u = 1,1553, d = 0,8656, p = 0,4838, e q = 0,5095. Esboce a árvore binomial para preço da ação. Quais são os preços possíveis após 1 mês? ($23,11 ou $17,31) Após 2 meses? ($26,69, $20, ou $14,99). Quais são os ganhos (*payoffs*) possíveis da opção no vencimento? ($4,69, $0, ou $0) Qual seria o valor da opção daqui a 1 mês se a ação subir? ($2,27) Qual seria o valor da opção daqui a 1 mês se o preço da ação cair? ($0) Qual é o valor atual da opção (assuma cada mês como 1/12 de um ano)? ($1,10)

Problemas Desafios

1. O preço corrente de uma ação é $20. Daqui a 1 ano, o preço será $26 ou $16. A taxa anual livre de risco é 5%. Encontre o preço de uma opção *call* sobre a ação que tenha um preço de exercício de $21 e que vence daqui a 1 ano. (Sugestão: Use composição diária.)

2. O preço corrente de uma ação é $15. Daqui 6 meses, o preço será r $18 ou $13. A taxa anual livre de risco é 6%. Encontre o preço de uma opção *call* sobre a ação que tenha um preço de exercício de $14 e que vence daqui a 6 meses. (Sugestão: Use composição diária).